

# TABLE DES MATIÈRES

PROLOGUE : objet et esprit de ce livre . . . . .	ix
<b>1 INTRODUCTION</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 THÈME ET CONTEXTE . . . . .	2
1.2 PLAN ET CONTENU . . . . .	7
1.3 CONVENTIONS DE NOTATION . . . . .	9
<b>2 GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1 DÉFINITION D'UN SOLIDE . . . . .	19
2.1.1 Espace, temps, référentiel . . . . .	19
2.1.2 Définition d'un solide – forme originelle . . . . .	29
2.1.3 Exemples de solides simples . . . . .	32
2.2 MOUVEMENT, VITESSE, ACCÉLÉRATION . . . . .	38
2.2.1 Forme actuelle transformée . . . . .	38
2.2.2 Mouvement, transformation, déplacement . . . . .	39
2.2.3 Bijectivité et bicontinuité du mouvement . . . . .	41
2.2.4 Vitesse et accélération . . . . .	48
2.2.5 Vitesse et description spatialisées . . . . .	53
2.2.6 Conditions initiales et aux limites . . . . .	55
2.2.7 Hiérarchie des solides et de leurs mouvements . . . . .	58
2.3 PLACEMENTS ET MOUVEMENTS RIGIDES . . . . .	60
2.3.1 Définition d'un mouvement rigide . . . . .	60
2.3.2 Décomposition en une rotation et une translation . . . . .	62
2.3.3 Translations . . . . .	66
2.3.4 Changements de base et de référentiel . . . . .	67
2.3.5 Groupes rotationnel et rigide . . . . .	68
2.3.6 Axe d'une rotation et décomposition hélicoïdale . . . . .	69
2.3.7 Repérages du tétraèdre et du trièdre mobiles . . . . .	71
2.3.8 Paramétrages d'une rotation plane . . . . .	76
2.3.9 Paramétrages d'une rotation spatiale . . . . .	80
2.3.10 Vitesse rigidifiante. Tenseurs vitesse de rotation . . . . .	88
2.4 TRANSFORMATIONS AFFINES . . . . .	93
2.4.1 Définition d'une transformation affine . . . . .	94
2.4.2 Décomposition en transformation linéaire et translation . . . . .	97
2.4.3 Propriétés du tenseur constant de la transformation . . . . .	99
2.4.4 Groupes linéaire et affine propres . . . . .	104

2.4.5	Axe principal d'élongation d'une transformation linéaire . . . . .	105
2.4.6	Dilatation-concentration sphérique (tension-pression) . . . . .	107
2.4.7	Elongation pure cylindrique (traction simple isotrope) . . . . .	108
2.4.8	Glissement simple (cisaillement simple) . . . . .	109
2.4.9	Tétraèdre ou trièdre déformable . . . . .	113
2.4.10	Vitesse affnante. Tenseurs taux de transformation . . . . .	118
2.4.11	Solide discret déformable . . . . .	121
2.5	TRANSFORMATIONS NON LINÉAIRES . . . . .	123
2.5.1	Analyse locale d'une transformation . . . . .	124
2.5.2	Définition du gradient de la transformation . . . . .	125
2.5.3	Propriétés du gradient de la transformation . . . . .	128
2.5.4	Gradient du déplacement . . . . .	130
2.5.5	Exemples de tenseurs gradients de la transformation . . . . .	130
2.5.6	Transformation plane . . . . .	131
2.5.7	Dilatation non linéaire . . . . .	135
2.5.8	Flexion pure . . . . .	137
2.5.9	Torsion pure . . . . .	140
2.6	TRANSFORMATIONS DE SURFACE ET VOLUME . . . . .	143
2.6.1	Transformation d'un vecteur surface . . . . .	143
2.6.2	Tenseur cogradient de la transformation . . . . .	145
2.6.3	Changement de volume. Déterminant . . . . .	148
2.6.4	Résumé des transformées de ligne, surface et volume . . . . .	150
2.6.5	Formules de Leibniz-Cramer et de Piola-Nanson . . . . .	151
2.6.6	Invariants du gradient de la transformation . . . . .	153
2.6.7	Valeurs et vecteurs propres du gradient de la transformation . . . . .	157
2.6.8	Volume et aire du solide déformé . . . . .	161
2.6.9	Résultante, centre et tenseur de forme . . . . .	163
2.7	CHANGEMENTS DE LONGUEUR ET D'ANGLE . . . . .	166
2.7.1	Changements de longueur et d'angle . . . . .	166
2.7.2	Tenseur matériel métrique . . . . .	167
2.7.3	Valeurs et directions principales d'élongation . . . . .	170
2.7.4	Calcul des valeurs et dyades propres d'élongation . . . . .	174
2.7.5	Tenseur matériel de déformation quadratique . . . . .	177
2.7.6	Tenseur matériel de déformation puissance . . . . .	179
2.7.7	Petites perturbations. Déformation infinitésimale . . . . .	182
2.7.8	Décompositions des tenseurs matériels . . . . .	184
2.8	DÉCOMPOSITIONS DU GRADIENT DE TRANSFORMATION . . . . .	187
2.8.1	Tenseur matériel de déformation pure ou d'élongation . . . . .	187
2.8.2	Décomposition polaire . . . . .	189
2.8.3	Décomposition singulière . . . . .	192
2.8.4	Décomposition unimodulaire . . . . .	193
2.8.5	Décomposition triangulaire . . . . .	195
2.8.6	Décompositions du cogradient de transformation . . . . .	197

2.9	VITESSES DE DÉFORMATIONS . . . . .	199
2.9.1	Vitesse nominale du gradient de la transformation . . . . .	199
2.9.2	Vitesse spatialisée du gradient de la transformation . . . . .	201
2.9.3	Vitesse de la déformation matérielle quadratique . . . . .	202
2.9.4	Vitesse de la déformation matérielle puissance . . . . .	204
2.9.5	Produits tensoriels de transformations . . . . .	205
2.9.6	Invariants traces et leurs gradients . . . . .	212
2.9.7	Vitesse d'élongation matérielle linéaire . . . . .	216
2.9.8	Gradient de la déformation matérielle puissance . . . . .	217
2.9.9	Récapitulation des descriptions matérielles . . . . .	218
2.10	RÉVISION DES TRANSFORMATIONS EXEMPLAIRES . . . . .	219
2.10.1	Elongation cylindrique (traction simple) . . . . .	220
2.10.2	Glissement simple (torsion simple) . . . . .	223
2.10.3	Dilatation non linéaire . . . . .	229
2.10.4	Flexion pure . . . . .	232
2.10.5	Glissement pur (torsion pure) . . . . .	235
2.11	DÉFORMATIONS COMPATIBLES ET PLASTIQUES . . . . .	239
2.11.1	Compatibilité (des déformations) . . . . .	239
2.11.2	Compatibilité des petites déformations planes . . . . .	240
2.11.3	Compatibilité des petites déformations spatiales . . . . .	241
2.11.4	Compatibilité des grandes transformations . . . . .	242
2.11.5	Déformations plastiques . . . . .	243
2.12	CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIELS CLASSIQUES . . . . .	246
2.12.1	Motivation . . . . .	246
2.12.2	Définitions des divers changements . . . . .	247
2.12.3	Résumé des divers changements . . . . .	251
2.12.4	Corrections de vitesse et d'accélération dues à la rotation de la terre . . . . .	252
<b>3</b>	<b>STATIQUE ET DYNAMIQUE</b> . . . . .	<b>255</b>
3.1	LA MASSE ET SA CONSERVATION . . . . .	257
3.1.1	Notions de masse et d'amas, de force et de moment . . . . .	257
3.1.2	Masse originelle d'un corps; densité matérielle . . . . .	265
3.1.3	Masse actuelle d'un corps; densité nominale . . . . .	268
3.1.4	Principe de conservation de la masse . . . . .	270
3.1.5	Théorèmes de localisation . . . . .	271
3.1.6	Loi locale de conservation de la masse . . . . .	273
3.2	FORCES ET MOMENTS CINÉTIQUES ET DYNAMIQUES . . . . .	276
3.2.1	Vecteurs résultante et centre d'amas . . . . .	276
3.2.2	Impulsion et moment cinétiques . . . . .	279
3.2.3	Force et moment d'inertie dynamiques . . . . .	281
3.2.4	Lemmes du centre d'amas et du moment cinétique central . . . . .	284
3.3	FORCES EXTERNES À DISTANCE ET DE CONTACT . . . . .	287
3.3.1	Vecteurs forces . . . . .	287
3.3.2	Force à distance de volume . . . . .	290

3.3.3	Force de contact de surface . . . . .	294
3.3.4	Comparaison des forces de contact et à distance . . . . .	301
3.3.5	Conditions aux limites . . . . .	303
3.4	FORCE INTERNE DE COHÉSION ; VECTEUR CONTRAINTE . . . . .	306
3.4.1	Forces de cohésion internes . . . . .	306
3.4.2	Vecteur contrainte . . . . .	307
3.5	ÉQUILIBRES DES FORCES ET DES MOMENTS . . . . .	312
3.5.1	Principes d'équilibres des forces et des moments . . . . .	312
3.5.2	Loi de la dynamique du centre d'amas et moments centraux . . . . .	315
3.5.3	Exemple : Equilibre d'un tronçon de barre . . . . .	317
3.5.4	Principes d'inertie et de l'action et de la réaction . . . . .	318
3.5.5	Principes d'équilibres des impulsions et de leurs moments . . . . .	322
3.5.6	Forces linéiques et concentrées . . . . .	323
3.6	ÉQUILIBRES DES SOLIDES RIGIDES . . . . .	331
3.6.1	Solide concentré . . . . .	331
3.6.2	Résumé de géométrie et cinématique rigide . . . . .	333
3.6.3	Cinétique rigide . . . . .	335
3.6.4	Tenseurs d'amas et d'inertie . . . . .	337
3.6.5	Dynamique rigide . . . . .	341
3.7	ÉQUILIBRES DES SOLIDES AFFINES ET DISCRETS . . . . .	345
3.7.1	Résumé de géométrie et cinématique affine . . . . .	346
3.7.2	Cinétique affine . . . . .	347
3.7.3	Dynamique affine . . . . .	348
3.7.4	Cinétique et dynamique d'un solide discret déformable . . . . .	350
3.8	TENSEUR DE CONTRAINTE NOMINALE . . . . .	358
3.8.1	Introduction du tenseur de contrainte nominale . . . . .	358
3.8.2	Existence du tenseur de contrainte nominale . . . . .	361
3.8.3	Tenseur de contrainte spatialisée . . . . .	368
3.8.4	Exemple : contrainte uniaxiale dans une barre . . . . .	369
3.9	TENSEUR DE CONTRAINTE MATÉRIELLE . . . . .	371
3.9.1	Inconvénient du tenseur de contrainte nominale . . . . .	371
3.9.2	Force de cohésion matérielle . . . . .	372
3.9.3	Vecteur et tenseur de contrainte matérielle . . . . .	373
3.9.4	Tenseur de contrainte puissance . . . . .	376
3.9.5	Petites perturbations. Tenseur de contrainte originelle . . . . .	379
3.10	ÉQUILIBRES LOCAUX DES CONTRAINTES . . . . .	381
3.10.1	Théorème de la divergence . . . . .	381
3.10.2	Exemple d'un tronçon de barre . . . . .	388
3.10.3	Equilibres des forces et des moments . . . . .	389
3.10.4	Equation différentielle du mouvement . . . . .	390
3.10.5	Equilibre d'une section de barre . . . . .	393
3.10.6	Perspective. Problème aux limites . . . . .	394
3.10.7	Récapitulation des descriptions matérielles . . . . .	396
3.11	STATIQUE ET ÉTATS DE CONTRAINTE HOMOGENES . . . . .	398
3.11.1	Quasi statique et statique des solides légers . . . . .	399

3.11.2	Contraintes homogènes . . . . .	401
3.11.3	Tension-pression sphériques . . . . .	408
3.11.4	Traction simple . . . . .	410
3.11.5	Cission ou cisaillement . . . . .	413
3.11.6	Torsion simple en petites perturbations . . . . .	415
3.11.7	Traction-torsion combinées . . . . .	420
3.12	SYMÉTRIES ET DÉCOMPOSITIONS DES CONTRAINTES . . . . .	425
3.12.1	Symétrie des contraintes, équilibre des moments . . . . .	425
3.12.2	Contraintes principales . . . . .	426
3.12.3	Partitions traceurs-déviateurs des contraintes . . . . .	429
3.12.4	Partitions pressions-cissions des contraintes . . . . .	431
3.12.5	Contraintes non symétriques . . . . .	431
3.13	OBJECTIVITÉ OU RELATIVITÉ CLASSIQUE . . . . .	433
3.13.1	Changements de référentiels cinématiques . . . . .	433
3.13.2	Postulats cinétiques et dynamiques . . . . .	434
3.13.3	Conséquences cinétiques et dynamiques . . . . .	436
3.13.4	Commentaires . . . . .	437
3.13.5	Résumé actualisé . . . . .	438
<b>4</b>	<b>MÉCANIQUE ET ÉNERGÉTIQUE</b> . . . . .	<b>441</b>
4.1	MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE DE LA PARTICULE . . . . .	443
4.1.1	Résumé de cinématique et dynamique de la particule . . . . .	443
4.1.2	Notions de travail et énergie potentielle de pesanteur . . . . .	445
4.1.3	Notions de travail et énergie élastiques . . . . .	448
4.1.4	Notions de puissance, travail et énergie . . . . .	455
4.1.5	Notion d'énergie cinétique . . . . .	457
4.1.6	Notion de dissipation . . . . .	459
4.2	MÉCANIQUE VIRTUELLE DE LA PARTICULE . . . . .	463
4.2.1	Notion de vitesse virtuelle d'une particule . . . . .	464
4.2.2	Déplacements virtuels et autres appellations . . . . .	473
4.2.3	Cinématique virtuelle d'une particule . . . . .	475
4.2.4	Calcul de vitesses virtuelles et cônes tangents . . . . .	481
4.2.5	Classification des ensembles accessibles et leurs cônes tangents . . . . .	484
4.2.6	Notions de puissance virtuelle et de force duale . . . . .	486
4.2.7	Principe des puissances virtuelles pour la particule . . . . .	488
4.2.8	Conclusion sur la particule et transition vers les solides . . . . .	490
4.3	PRINCIPALES CLASSES DE VITESSES VIRTUELLES . . . . .	492
4.3.1	Du solide concentré au solide continu . . . . .	493
4.3.2	Vitesses virtuelles transformantes libres . . . . .	494
4.3.3	Vitesses virtuelles transformantes tangentes . . . . .	498
4.3.4	Vitesses virtuelles transformantes nulles . . . . .	505
4.3.5	Vitesses virtuelles rigidifiantes . . . . .	508
4.3.6	Vitesses virtuelles affinant . . . . .	513

4.3.7	Vitesses virtuelles inclinantes . . . . .	516
4.3.8	Conclusion sur les vitesses virtuelles liées . . . . .	520
4.4	PUISSANCES VIRTUELLES EN VIGUEUR . . . . .	522
4.4.1	Puissance virtuelle externe de gravité . . . . .	523
4.4.2	Puissance virtuelle interne d'inertie . . . . .	524
4.4.3	Puissance virtuelle externe de contact . . . . .	524
4.4.4	Puissance virtuelle interne du vecteur contrainte . . . . .	524
4.4.5	Puissance virtuelle résultante rigidifiante . . . . .	525
4.4.6	Puissance virtuelle interne déformante du tenseur contrainte . . . . .	526
4.4.7	Puissance virtuelle résultante transformante . . . . .	528
4.4.8	Dualité énergétique fonctionnelle . . . . .	529
4.5	PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES RIGIDIFIANTES . . . . .	535
4.5.1	Puissance d'une force concentrée à une vitesse rigidifiante . . . . .	535
4.5.2	Puissance d'une force distribuée à une vitesse rigidifiante . . . . .	542
4.5.3	Rappel des équilibres des forces et des moments . . . . .	544
4.5.4	Principe des puissances virtuelles rigidifiantes . . . . .	545
4.6	PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES TRANSFORMANTES . . . . .	553
4.6.1	Déduction du principe . . . . .	554
4.6.2	Construction du principe . . . . .	559
4.6.3	Induction du principe . . . . .	561
4.6.4	Principe des vitesses virtuelles transformantes . . . . .	575
4.6.5	Contraintes conjuguées aux déformations . . . . .	578
4.7	LOI DE VARIATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE . . . . .	581
4.7.1	Principe d'équilibre des puissances réelles . . . . .	583
4.7.2	Energie cinétique . . . . .	584
4.7.3	Principe ou théorème de variation de l'énergie cinétique . . . . .	586
4.7.4	Energie potentielle de gravité . . . . .	587
4.7.5	Energie potentielle d'une pression de contact . . . . .	589
4.7.6	Energie élastique . . . . .	592
4.7.7	Energies rigide et isovolumique . . . . .	595
4.7.8	Primitive directionnelle énergie . . . . .	599
4.7.9	Loi de conservation de l'énergie mécanique . . . . .	602
4.7.10	Energie et dissipation internes mécaniques . . . . .	604
4.7.11	Principe de variation de l'énergie mécanique . . . . .	607
4.8	INÉGALITÉ DE LA DISSIPATION . . . . .	610
4.8.1	Notions d'irréversibilité et de dissipation . . . . .	611
4.8.2	Inégalité de la dissipation. Second principe de la mécanique . . . . .	618
4.8.3	Fonction potentielle de dissipation ou dissipotence . . . . .	620
4.8.4	Récapitulation des deux principes de la mécanique énergétique . . . . .	630
4.9	OBJECTIVITÉ DES PRINCIPES ÉNERGÉTIQUES . . . . .	631
4.9.1	Rappel d'un changement de référentiel classique . . . . .	631
4.9.2	Définition de l'objectivité d'un principe . . . . .	632
4.9.3	Déduction de la loi d'équilibre des forces . . . . .	633
4.9.4	Déduction de la loi d'équilibre des moments . . . . .	634

<b>CONCLUSION</b>	<b>639</b>
SCIENCE . . . . .	640
CONSCIENCE . . . . .	641
<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>645</b>
<b>INDEX</b>	<b>649</b>