

TABLE DES MATIÈRES

	PRÉFACE	V
	REMERCIEMENTS.....	XIX
	INTRODUCTION	1
PARTIE I	LE NOMBRE SOUS L'ANCIEN RÉGIME	
CHAPITRE 1	LE NOMBRE CHEZ PLATON ET CHEZ ARISTOTE.....	7
	1.1 Prélude.....	7
	1.2 Platon.....	9
	1.3 Aristote	12
	1.4 L'opposition entre Platon et d' Aristote au sujet du nombre ..	14
CHAPITRE 2	D'EUDOXE À ARCHIMÈDE.....	17
	2.1 Prélude.....	17
	2.2 Eudoxe.....	17
	2.3 Euclide.....	24
	2.4 Archimède	31
CHAPITRE 3	LE NOMBRE AUX MAINS DE LA PHILOSOPHIE ET DE LA THÉOLOGIE.	39
	3.1 Préambule.....	39
	3.2 Plotin	40
	3.3 Augustin	45
	3.4 Proclus	47
	3.5 Thomas d'Aquin	53
CHAPITRE 4	LE NOMBRE S'ÉMANCIPE.....	61
	4.1 Préambule.....	61
	4.2 Notations et symboles.....	64
	4.3 Le nombre aux mains des algébristes.....	68
	4.4 Le continu numérique	78

	4.5	Le nombre aux mains des analystes: l'infini, les infiniment petits, la notion de fonction.	83
CHAPITRE 5		LE NOMBRE REPRIS PAR LES MATHÉMATIENS	93
	5.1	Préambule.....	93
	5.2	Les nombres réels transcendants	94
	5.3	Les nombres réels algébriques	96
	5.4	La continuité des fonctions numériques.....	102
	5.5	Nombres et ensembles. Dedekind et Cantor.....	111
	5.5.1	La contribution de Dedekind	111
	5.5.2	La contribution de Cantor.....	120
PARTIE II		NON ! SIRE, C'EST UNE RÉVOLUTION	
CHAPITRE 6		L'ÉVOLUTION POSTCANTORIENNE.	135
	6.1	Préambule.....	135
	6.2	L'extension des notions classiques	135
	6.3	L'axiomatisation : le cas de la géométrie élémentaire	138
	6.4	Les axiomes de l'arithmétique	140
	6.5	Naissance de l'axiomatique des ensembles	141
	6.6	L'axiomatique des structures.....	147
	6.7	Le programme de Hilbert	149
CHAPITRE 7		LA FORMALISATION DES MATHÉMATIQUES.....	155
	7.1	Préambule.....	155
	7.2	La logique du premier ordre. La formalisation mathématique	156
	7.2.1	La notion de relation	156
	7.2.2	Quelques exemples de relations	157
	7.2.3	La syntaxe du premier ordre	158
	7.2.4	La logique des connecteurs. Les tautologies.....	161
	7.2.5	Les axiomes de Leibniz, ou axiomes de l'égalité	162
	7.2.6	La logique des quantificateurs	163
	7.2.7	Les axiomes de spécification.....	164
	7.2.8	Systèmes formels du premier ordre. Les règles d'inférence de Hilbert	165
	7.2.9	Les théories du premier ordre	167
	7.2.10	Remarques	167
	7.3	Les modèles ensemblistes d'un système formel du premier ordre.....	168
	7.4	Trois systèmes formels du premier ordre.....	171

7.4.1	Remarque préliminaire.....	171
7.4.2	Un système formel pour le Groupe	171
7.4.3	Un système formel du premier ordre pour l'arithmétique	173
7.4.4	Un système formel du premier ordre pour les ensembles.....	175
7.4.5	Quelques remarques.....	180
CHAPITRE 8	LE THÉORÈME DE COMPLÉTUDE DE LA LOGIQUE DU PREMIER ORDRE	183
8.1	Préambule.....	183
8.2	Le théorème de complétude.....	185
	<i>Théorème 1</i> (Théorème de complétude de la logique du premier ordre).....	185
	<i>Théorème 2</i>	185
	<i>Théorème 3</i> (Théorème de Löwenheim-Skolem, forme simple).....	187
8.3	Le théorème de complétude et la finitude.....	188
	<i>Théorème 4</i> (Théorème de compacité de la logique du premier ordre (Gödel-Malcev))	188
	<i>Théorème 5</i>	189
	<i>Théorème 6</i>	191
8.4	Complément sur les ensembles et extension de la logique du premier ordre.....	192
	<i>Théorème 7</i> (Théorème de Löwenheim-Skolem. Forme descendante forte).....	197
	<i>Théorème 8</i> (Théorème de Löwenheim-Skolem. Version ascendante de Tarski-Vaught)	197
8.5	Numéral et nombre naturel.....	199
CHAPITRE 9	LES THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE.....	203
9.1	L'incomplétude de l'arithmétique.....	203
	<i>Théorème 9</i> Premier théorème d'incomplétude. Gödel 1931	204
9.2	De la non-contradiction de l'arithmétique.	205
	<i>Théorème 10</i> Second théorème d'incomplétude. Gödel 1931	207
9.3	Un théorème de Tarski. Le théorème d'incomplétude généralisé.....	209
	<i>Théorème 11</i> De l'impossibilité de formaliser la vérité (Tarski).....	210
	<i>Théorème 12</i> Théorème d'incomplétude généralisé.....	211
9.4	Premiers commentaires sur les théorèmes de Gödel	213

CHAPITRE 10	DES MATHÉMATIQUES POSTGÖDÉLIENNES	219
10.1	Questions	219
10.2	De quelques réponses	221
10.2.1	Réponses formalistes	221
10.2.2	Des réponses fictionnistes et quasi-empiristes.....	223
10.2.3	De la réponse de Gödel.....	230
10.3	Incomplétude plus complétude.....	233
10.3.1	Observations préalables	233
10.3.2	Les deux niveaux en mathématiques.....	234
10.3.3	De la multiplicité des modèles.....	236
10.3.4	Du renversement entre la finitude et l'infinitude.....	238
10.3.5	Esquisse d'une réponse	240
CHAPITRE 11	EPILOGUE	249
	BIBLIOGRAPHIE.....	253
	TABLE DES SIGNES CONVENTIONNELS.....	257
	INDEX	261